

Cap. 2 Problemas de Otimização Combinatória

aula 7

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.ulisboa.pt)

TSP

Cap. 2 – Problemas de Otimização Combinatória - Roteamento

Problemas de roteamento nos nodos


Problemas de roteamento nos arcos

Utilização de Software – VRP Spreadsheet Solver

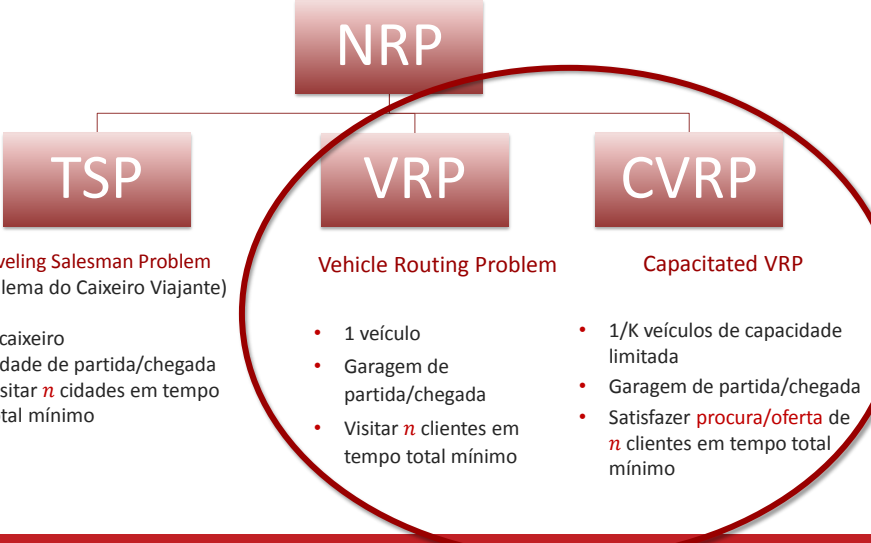
➤ VRP

- Modelos – Casos Orientado e não Orientado
- Relaxações
- Heurística
- Solver/Excel

P. Toth & D. Vigo (2014)
Vehicle Routing Problems, Methods, and Application
2nd ed., MOS-SIAM Series on Optimization, Philadelphia



Node Routing Problems (NRP)



```

graph TD
    NRP[NRP] --- TSP[TSP]
    NRP --- VRP[VRP]
    NRP --- CVRP[CVRP]
  
```

<p>TSP</p> <p>Traveling Salesman Problem (Problema do Caixeiro Viajante)</p> <ul style="list-style-type: none"> • 1 caixeiro • Cidade de partida/chegada • Visitar n cidades em tempo total mínimo 	<p>VRP</p> <p>Vehicle Routing Problem</p> <ul style="list-style-type: none"> • 1 veículo • Garagem de partida/chegada • Visitar n clientes em tempo total mínimo 	<p>CVRP</p> <p>Capacitated VRP</p> <ul style="list-style-type: none"> • 1/K veículos de capacidade limitada • Garagem de partida/chegada • Satisfazer procura/oferta de n clientes em tempo total mínimo
--	--	--


SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2018/19
63



VRP – Componentes Básicas


- Características da frota de veículos
- Condições de transporte
- Requisitos dos clientes – como podem ser satisfeitos
- Conceito de rota admissível
- Especificidades das rotas
- Dados a considerar – que custos e/ou proveitos; tempos; ofertas/procuras
- Horizonte de planeamento
- Sistemas dinâmicos – comunicação constante condutor/planeamento

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2018/19
64



VRP – Curiosidades

- **1959** – Dantzig & Ramser – *The Truck Dispatching Problem*
 Management Science, Vol. 6, pp. 80-91



 - Distribuição de gasolina
 - 1º modelo matemático
 - 1ª Heurística

- **1964** – Clarke & Wright – *Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points*
 Operations Research, Vol. 12, pp. 568-581
 - Savings Heuristic – greedy

- **Grupos de Investigadores**
 - USA – Transportation Science and Logistics society
 - Europa – VeRoLog – Vehicle Routing and Logistics Optimization (www.verolog.eu)


SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2018/19
65



VRP – características

Capacitated VRP

- Veículos de capacidade limitada
- Garagem de partida/chegada – depósito
- Satisfazer procura/oferta de n clientes em tempo (custo; distância; ...) total mínimo
- Decidindo:
 - que veículo deve satisfazer que clientes
 - &
 - qual a sequência de clientes a visitar por cada veículo
- VRP - Componentes básicas Identificar – requisitos da procura



Gilbert Laporte
HEC Montréal

Em geral, NP-difíceis!

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2018/19
66

Capacitated VRP (CVRP) – Notação



- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – Clientes
- $V = N \cup \{0\}$; 0 – depósito
- Grafo:
 - $G = (V, E)$ – Não Orientado ($\{(i, j) \in E\}$) (grafo completo: $|E| = \frac{n(n+1)}{2}$)
 - ou
 - $G = (V, A)$ – Orientado ($\{(i, j) \in A\}$) (grafo completo: $|A| = n(n+1)$)
- $K = \{1, \dots, |K|\}$ ($|K| \geq 1$) veículos homogêneos de capacidade limitada
- $Q > 0$ – capacidade de cada veículo
- c_{ij} – custo (distância; tempo;...) da ligação (i, j)
- q_i – procura/oferta do cliente $i \in N$
- $\delta^+(i)$ – nº de arcos a sair de i (grau externo); $\delta^-(i)$ – nº de arcos a entrar (grau interno) em $i \in V$
- $\delta^+(S)$ – nº de arcos a sair de $S \subset V$; $\delta^-(S)$ – nº de arcos a entrar em $S \subset V$
- $\delta(i)$ – nº de arestas incidentes em $i \in V$; $\delta(S)$ – nº de arestas incidentes em $S \subset V$

Capacitated VRP (CVRP) – Notação



- **Rota** – sequência de vértices, com início e fim no depósito, $r = (0, i_1, i_2, \dots, i_s, 0)$ que visita um subconjunto de clientes, $S = \{i_1, i_2, \dots, i_s\} \subseteq N$
- A **rota** r é **admissível**:
 - se a procura dos clientes visitados, S , não excede a capacidade do veículo, ou seja, se $q(S) = \sum_{i \in S} q_i \leq Q$
 - e se
 - nenhum cliente é visitado mais de uma vez
- **SA** para o CVRP - $|K|$ rotas admissíveis, uma para cada veículo $k \in K$
- As rotas $r_1, r_2, \dots, r_{|K|}$ e os correspondentes conjuntos de clientes $S_1, S_2, \dots, S_{|K|}$ representam uma **SA** para o CVRP se todas as rotas forem admissíveis e se $S_1, S_2, \dots, S_{|K|}$ representarem uma partição de N

CVRP – Resolução



- Tarefas interligadas para identificar uma SA para o CVRP:
 - Identificar uma partição do conjunto de clientes N em $|K|$ subconjuntos
 - Identificar uma rota admissível que sirva cada um dos subconjuntos de clientes - TSP
- Se resolvidas em separado não podemos garantir a otimalidade da solução!

CVRP – Modelos - CO



- Dados: $G = (V, A)$; c_{ij} ; q_i ; K ; Q ;
- Variáveis: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se 1 veículo viaja de } i \in V \text{ para } j \in V \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$
- Modelo: $|A| = n(n + 1)$ variáveis!

G. Laporte, H. Mercure, Y. Nobert,
1986
*An exact algorithm for the
assymetrical capacitated VRP*
Networks, Vol. 16, pp. 33-46

$$(VRP1) \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad \text{Minimização do custo total}$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N & \text{Sai 1 vez de cada cliente } i \\ \sum_{k \in \delta^-(i)} x_{ki} = 1 \quad \forall i \in N & \text{Chega 1 vez a cada cliente } i \\ \sum_{j \in \delta^+(0)} x_{0j} = |K| & \text{São usados os } |K| \text{ veículos} \\ \sum_{j \in \delta^+(S)} x_{ij} \geq \left\lceil \frac{q(S)}{Q} \right\rceil \quad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset & \text{Restrições de eliminação de} \\ & \text{subcircuitos ilegais \& capacidade} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A & \end{cases}$$

VRP – Modelos – CO – exemplo 4

Considere a matriz de custos seguinte relativa a um problema de roteamento nos nodos

	Dep	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Dep	-	20	55	50	40	15	30	40
C1	25	-	40	20	50	25	15	50
C2	60	35	-	50	20	30	40	10
C3	35	30	45	-	20	50	60	35
C4	25	40	35	30	-	50	60	20
C5	30	35	10	60	35	-	80	20
C6	45	20	35	50	70	45	-	25
C7	60	35	25	40	30	60	50	-

Em que dispõe de veículos com 80 de capacidade e as procuras dos clientes são:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Procuras	45	50	30	20	25	35	30

- Utilize o Solver para obter a solução do problema relaxado em que não se consideram as restrições de eliminação de subcircuitos ilegais.
- Introduza restrições na resolução de a) para tentar melhorar o valor do minorante, caso possível.

CVRP – Modelos - CNO

➤ Dados: $G = (V, E)$; c_{ij} ; q_i ; K ; Q ;

➤ Variáveis: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se 1 veículo viaja entre } i \in V \text{ e } j \in V \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$

➤ Modelo:

$$|E| = \frac{n(n+1)}{2} \text{ variáveis!}$$

G. Laporte, Y. Nobert, M. Desrochers 1985
Optimal routing under capacity and distance restrictions
Op. Res., Vol. 33, pp. 1050-1073

$$(VRP2) \min \sum_{\{i,j\} \in E} c_{ij} x_{ij} \quad \text{Minimização do custo total}$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} \sum_{j \in \delta(i)} x_{ij} = 2 \quad \forall i \in N & \text{2 arestas incidentes em cada cliente } i \\ \sum_{j \in \delta(0)} x_{0j} = 2|K| & \text{Os } |K| \text{ veículos partem e chegam ao depósito} \\ \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2 \left\lfloor \frac{q(S)}{Q} \right\rfloor \quad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset & \text{Restrições de eliminação de subcircuitos ilegais \& capacidade} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall \{i,j\} \in E & \end{cases}$$

VRP – Modelos – CNO – exemplo 5



Considere a matriz de custos seguinte relativa a um problema de roteamento nos nodos

	Dep	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Dep	-	20	55	50	40	15	30	40
C1		-	40	20	50	25	15	50
C2			-	50	20	30	40	10
C3				-	20	50	60	35
C4					-	50	60	20
C5						-	80	20
C6							-	25
C7								-

Em que dispõe de veículos com 80 de capacidade e as procuras dos clientes são:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Procuras	45	50	30	20	25	35	30

- Utilize o Solver para obter a solução do problema relaxado em que não se consideram as restrições de eliminação de subcircuitos ilegais.
- Introduza restrições na resolução de a) para tentar melhorar o valor do minorante, caso possível.

CVRP – Modelos



- Técnicas para lidar com as restrições de quebra de subcircuitos (em nº exponencial):
 - Relaxações – eliminando todas ou parte destas restrições, que podem depois ir sendo inseridas – Branch-and-Cut!
 - Recorrendo a novas variáveis & restrições – caso orientado – *MTZ-model*

D.L. Miller, A.W. Tucker, R.A. Zemlin, 1960
Integer programming formulations for the TSP
 Journal of the ACM, Vol. 7, pp. 326-329

CVRP – Modelos - CO

- Restrições de eliminação de subcircuitos ilegais & capacidade:

$$\sum_{j \in \delta^+(S)} x_{ij} \geq \left\lceil \frac{q(S)}{Q} \right\rceil \quad \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$$

D.L. Miller, A.W. Tucker, R.A. Zemlin,
1960

- Novas Variáveis: u_i – procura já satisfeita quando o veículo chega a $i \in N$
 - Quebra de Subcircuitos ilegais: $u_i - u_j + Qx_{ij} \leq Q - q_j \quad \forall (i, j) \in A(N)$
 - Capacidade: $q_i \leq u_i \leq Q \quad \forall i \in N$

CVRP – Modelos - CO

- Modelo: MTZ

(VRPMTZ) $\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$ Minimização do custo total

$$\text{s. a: } \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N & \text{ Sai 1 vez de cada cliente } i \\ \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ji} = 1 \quad \forall i \in N & \text{ Chega 1 vez a cada cliente } i \\ \sum_{j \in \delta^+(0)} x_{0j} = |K| & \text{ São usados os } |K| \text{ veículos} \\ u_i - u_j + Qx_{ij} \leq Q - q_j \quad \forall (i, j) \in A(N) & \text{ Eliminação de subcircuitos ilegais} \\ q_i \leq u_i \leq Q \quad \forall i \in N & \text{ Capacidade} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i, j) \in A & \end{array} \right.$$

$n(n+2)$ variáveis

$n(n+5) + 1$ restrições

VRP – Modelos – CO – exemplo 4

Considere de novo o exemplo 4:

- a) Formule o problema utilizando as restrições *MTZ* para eliminação dos subcircuitos ilegais

- b) Compare os valores dos problemas resolvidos anteriormente com o de a)